第 02 讲 双变量单调问题

参考答案与试题解析

1.（2019•苏州三模）已知函数 $f(x)=(x-1)e^{x}-\frac{a}{2}x^{2}$，其中 $a\in R$.

（Ⅰ）函数 $f(x)$ 的图象能否与 x 轴相切？若能，求出实数 a；若不能，请说明理由；

（Ⅱ）求最大的整数 a，使得对任意 $x_1\in R$，$x_2\in(0,+\infty)$，不等式 $f(x_1+x_2)-f(x_1-x_2)>-2x_2$ 恒成立.

【解答】解：（Ⅰ）$f'(x)=xe^{x}-ax$.

假设函数 $f(x)$ 的图象与 x 轴相切于点 $(t,0)$，

则有 $\begin{cases} f(t)=0 \\ f'(t)=0 \end{cases}$，即 $\begin{cases} (t-1)e^{t}-\frac{a}{2}t^{2}=0 \\ te^{t}-at=0 \end{cases}$.

显然 $t\neq 0$，$e^{t}=a>0$，代入方程 $(t-1)e^{t}-\frac{a}{2}t^{2}=0$ 中得，$t^{2}-2t+2=0$.

$\because\triangle=-4<0$，$\therefore$方程 $t^{2}-2t+2=0$ 无解.

故无论 a 取何值，函数 $f(x)$ 的图象都不能与 x 轴相切；

（Ⅱ）依题意，$f(x_1+x_2)-f(x_1-x_2)>(x_1-x_2)-(x_1+x_2)$

$\Leftrightarrow f(x_1+x_2)+(x_1+x_2)>f(x_1-x_2)+(x_1-x_2)$ 恒成立.

设 $g(x)=f(x)+x$，则上式等价于 $g(x_1+x_2)>g(x_1-x_2)$，

要使 $g(x_1+x_2)>g(x_1-x_2)$ 对任意 $x_1\in R$，$x_2\in(0,+\infty)$ 恒成立，即使 $g(x)=(x-1)e^{x}-\frac{a}{2}x^{2}+x$ 在 R 上单调递增，

$\therefore g'(x)=xe^{x}-ax+1\geqslant 0$ 在 R 上恒成立.

$\because g'(1)=e-a+1\geqslant 0$，则 $a\leqslant e+1$，

$\therefore g'(x)\geqslant 0$ 在 R 上成立的必要条件是：$a\leqslant e+1$.

□□□□□□ $a=3$ □□ $xe^x-3x+1\geqslant 0$ □□□□

□ $h(x)=e^x-x-1$ □□ $h'(x)=e^x-1$ □

□ $x<0$ □□ $h'(x)<0$ □□ $x>0$ □□ $h'(x)>0$ □

$\therefore h(x)_{min}=0$ □□ $\forall x\in R$ □ $e^x\geqslant x+1$ □

□□□□ $x\geqslant 0$ □□ $xe^x\geqslant x^2+x$ □ $xe^x-3x+1\geqslant x^2-2x+1=(x-1)^2\geqslant 0$ □

□ $x<0$ □□ $e^x<1$ □ $xe^x-3x+1=x(e^x-3+\frac{1}{x})>0$ □ $\therefore xe^x-3x+1\geqslant 0$ □□□□

□□□ a □□□□□□□ 3□

2□□2020□•□□□□□□□□□ $g(x)=x-alnx$ □

□1□□□□ $g(x)$ □□□□□

□2□□ $a>2$ □□ $f(x)=\frac{1}{x}-g(x)$ □□□□□□□ x_1 □ $x_2(x_1<x_2)$ □□□□ $f(x_1)-f(x_2)>(a-2)(x_1-x_2)$ □

□□□□□□□1□ $g(x)=x-alnx$ □□□□□ $(0,+\infty)$ □ $g'(x)=1-\frac{a}{x}=\frac{x-a}{x}$ □

(i) □ $a\leqslant 0$ □□ $g'(x)\geqslant 0$ □□□ $g(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□

(ii) □ $a>0$ □□ $x\in(0,a)$ □□ $g'(x)<0$ □

□ $x\in(a,+\infty)$ □□ $g'(x)>0$ □

□□ $g(x)$ □ $(0,a)$ □□□□□□ $(a,+\infty)$ □□□□□

□□□□2□□□ $f(x)$ □□□□□□□□ $a>2$ □

$f'(x)=-\frac{x^2-ax+1}{x^2}$ □

□□ $f(x)$ □□□□□□ x_1 □ x_2 □□ $x^2-ax+1=0$ □

□□ $x_1x_2=1$ □□□□ $x_1<x_2$ □□ $x_2>1$ □

□ $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=-\frac{1}{x_1x_2}-1+a\frac{lnx_1-lnx_2}{x_1-x_2}$

$=-2+a\frac{lnx_1-lnx_2}{x_1-x_2}=-2+a\frac{-2lnx_2}{\frac{1}{x_2}-x_2}$ □

□□ $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$ □□□□ $\frac{1}{x_2}-x_2+2lnx_2<0$ □

□ $h(x)=\frac{1}{x}-x+2lnx(x>1)$ □

□ $h'(x)=-\frac{(x-1)^2}{x^2}<0$ □

□ $h(x)$ □ $(1,+\infty)$ □□□□□□ h □1□ $=0$ □

□ $x\in(1,+\infty)$ □□ $h(x)<0$ □□ $\frac{1}{x_2}-x_2+2lnx_2<0$ □

□ $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$ □

□□ $f(x_1)-f(x_2)>(a-2)(x_1-x_2)$ □

3□□2020•□□□□□□ $f(x)=(a+1)lnx+ax^2+1$ □

□1□□□□□ $f(x)$ □□□□□

□2□□ $a<-1$ □□□□□□ x_1 □ $x_2\in(0,+\infty)$ □ $|f(x_1)-f(x_2)|\geqslant 4|x_1-x_2|$ □□ a □□□□□□

□□□□□□□I□ $f(x)$ □□□□□ $(0,+\infty)$. $f'(x)=\frac{a+1}{x}+2ax=\frac{2ax^2+a+1}{x}$ □

□ $a\geqslant 0$ □□ $f'(x)>0$ □□ $f(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□

□ $a \leqslant -1$ □□ $f'(x)<0$ □□ $f(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□

□ $-1<a<0$ □□□ $f'(x)=0$ □□□ $x=\sqrt{-\frac{a+1}{2a}}$ □

□□ $x\in(0,\sqrt{-\frac{a+1}{2a}})$ □□ $f'(x)>0$ □ $x\in(\sqrt{-\frac{a+1}{2a}},+\infty)$ □□ $f'(x)<0$ □

□ $f(x)$ □ $(0,\sqrt{-\frac{a+1}{2a}})$ □□□□□□ $(\sqrt{-\frac{a+1}{2a}},+\infty)$ □□□□□

□Ⅱ□□□□□ $x_1 \ldots x_2$ □□ $a<-1$ □□□Ⅰ□□□ $(0,+\infty)$ □□□□□

□□ $\forall x_1$ □ $x_2\in(0,+\infty)$ □ $|f(x_1)-f(x_2)| \geqslant 4|x_1-x_2|$

□□□ $\forall x_1$ □ $x_2\in(0,+\infty)$ □ $f(x_2)+4x_2 \geqslant f(x_1)+4x_1$ ①

□ $g(x)=f(x)+4x$ □□ $g'(x)=\frac{a+1}{x}+2ax+4$

① □□□ $g(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□ $\frac{a+1}{x}+2ax+4 \leqslant 0$ □

□□ $a \leqslant \frac{-4x-1}{2x^2+1}=\frac{(2x-1)^2-4x^2-2}{2x^2+1}=\frac{(2x-1)^2}{2x^2+1}-2$

□ a □□□□□□ $(-\infty$ □ $-2]$ □□12 □□

4□□2020 年•□□□□□□□□□ $f(x)=2lnx+\frac{m}{x}$ □ $m>0$ □

□1□□ $m=e(e$ □□□□□□□□□□□□ $f(x)$ □□□□□

□2□□□□□ $g(x)=f(x)-x$ □□□□□

□3□□ $m \geqslant 1$ □□□□□□□□ $b>a>0$ □ $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<1$ □

□□□□□□□1□□ $m=e$ □□ $f(x)=2lnx+\frac{e}{x}$ □ $f'(x)=\frac{2x-e}{x^2}$ □

□$x<\frac{e}{2}$□□$f'(x)<0$□$x=\frac{e}{2}$□□$f'(x)=0$□□$x>\frac{e}{2}$□□$f'(x)>0$□

□□□$x=\frac{e}{2}$□□$f(x)$□□□□□$f(\frac{e}{2})=2\ n\frac{e}{2}+2=4-2ln2$□

□2□$g(x)=f(x)-x=2lnx+\frac{m}{x}-x(x>0)$□$g'(x)=\frac{2}{x}-\frac{m}{x^2}-1=\frac{-x^2+2x-m}{x^2}=\frac{-(x-1)^2+1-m}{x^2}$□

$1m.12$□□$g'(x),,03$□$g(x)=f(x)-x4$□$(0,+\infty)5$□□□□□

□3□□□$0<m<1$□□$1-m>0$□$1-\sqrt{1-m}>0$□$g'(x)=\frac{-(x-1+\sqrt{1-m})(x-1-\sqrt{1-m})}{x^2}$□

□$0<x<1-\sqrt{1-m}$□□$g'(x)<0$□□$1-\sqrt{1-m},x<1+\sqrt{1-m}$□□$g'(x)..0$□

□$x.1+\sqrt{1-m}$□□$g'(x),,0$□

□$0<m<1$□□$g(x)=f(x)-x$□$(0,1-\sqrt{1-m})$□$[1+\sqrt{1-m},+\infty)$□□□□□□

□$[1-\sqrt{1-m},1+\sqrt{1-m})$□□□□□□

□□2□□□□$m.1$□□$g(x)=f(x)-x$□$(0,+\infty)$□□□□□□

□□□□$m.1$□□□□□$b>a>0$□f□b□$-b<f$□a□$-a$□

□□□□$b>a>0$□$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<1$□

5□□2020•□□□□□□□□□$f(x)=x^2-2ax+2(a+1)lnx$□

□1□□□□$f(x)$□□□□□□□□□a□□□□□□

□2□□□□□$-1<a<3$□□□□□□□x_1□$x_2\in(0,+\infty)$□$x_1\neq x_2$□□$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>2$□

□□□□□□□1□□□□□□$f'(x)=2\frac{x^2-ax+a+1}{x}(x>0)$□

□□□□ $f(x)$ □□□□□□□□□ $\frac{x^2-ax+a+1}{x}=0$ □□□□□□□□□

□ $x^2-ax+a+1=0$ □□□□□□□□□

□□ $\begin{cases} a^2-4(a+1)>0 \\ a>0 \\ a+1>0 \end{cases}$ □□□ $a>2+2\sqrt{2}$ □□□ a □□□□□□ $(2+2\sqrt{2}$ □ $+\infty)$ □□6 □□

□2□□□□□□□□ $g(x)=f(x)-2x=x^2-2ax+2(a+1)lnx-2x$ □

□ $g'(x)=2x-2(a+1)+2(a+1)\frac{a+1}{x}\geqslant 4\sqrt{x\cdot\frac{a+1}{x}}-2(a+1)=4\sqrt{a+1}-2(a+1)=2\sqrt{a+1}(2-\sqrt{a+1})$ □

□□ $-1<a<3$ □ $0<\sqrt{a+1}<2$ □□ $g'(x)>0$ □□ $g(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□

□□□ $0<x_2<x_1$ □□□ $g(x_1)-g(x_2)>0$ □

□ $f(x_1)-f(x_2)-2x_1+2x_2>0$ □□ $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>2$ □

□ $0<x_1<x_2$ □□□□□□ $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>2$ □

□□□□□□□□□□ x_1 □ $x_2\in(0,+\infty)$ □ $x_1\neq x_2$ □□ $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>2\cdots$ □12 □□

6□□2020 □•□□□□□□□□□□□ $f(x)=(a+1)lnx+ax^2+1$ □

□I□□ $a=2$ □□□□□ $y=f(x)$ □ $(1$ □ f □1□ $)$ □□□□□□□

□II□□ $a\leqslant -2$ □□□□□□□□ x_1 □ $x_2\in(0,+\infty)$ □ $|f(x_1)-f(x_2)|\geqslant 4|x_1-x_2|$ □

□□□□□□□□□□□□12 □□

□□□I□□ $a=2$ □□ $f(x)=3lnx+2x^2+1$ □ $f'(x)=\frac{3}{x}+4x$ □

$\therefore f$□1□$=3$□f'□1□$=7$□

$\therefore$□□$y=f(x)$□$(1$□f□1□$)$□□□□□□□$y=7x-4$□

□Ⅱ□$\because a\leqslant -2$□$f(x)$□□□□□$(0,+\infty)$□$f'(x)=\frac{a+1}{x}+2ax=\frac{2ax^2+a+1}{x}<0$□

$\therefore f(x)$□$(0,+\infty)$□□□□□

□□□$x_1\geqslant x_2$□□□$|f(x_1)-f(x_2)|\geqslant 4|x_1-x_2|$□□□$f(x_2)-f(x_1)\geqslant 4x_1-4x_2$□

□$f(x_2)+4x_2\geqslant f(x_1)+4x_1$□

□$g(x)=f(x)+4x$□□$g'(x)=\frac{a+1}{x}+2ax+4=\frac{2ax^2+4x+a+1}{x}$□

□$a\leqslant -2$□$x>0$□$\therefore g'(x)\leqslant \frac{-4x^2+4x-1}{x}=\frac{-(2x-1)^2}{x}\leqslant 0$□

□□$g(x)$□$(0,+\infty)$□□□□□$g(x_1)\leqslant g(x_2)$□□$f(x_1)+4x_1\leqslant f(x_2)+4x_2$□

□□□x_1□$x_2\in(0,+\infty)$□$|f(x_1)-f(x_2)|\geqslant 4|x_1-x_2|$□

7□□2020•□□□□□□□□$f(x)=\frac{a-2lnx}{x^2}$□□$(1$□f□1□$)$□□□□□□□$y=-4x+1$□□□

□1□□□□a□□□$f(x)$□□□□

□2□□□□□x_1□$x_2\in(0,\frac{1}{e}]$□□$|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1^2-x_2^2}|>\frac{k}{x_1^2\cdot x_2^2}$□□□□$k$□□□□□□

□□□□□1□□□□□$f'(x)=\frac{-2-2a+4lnx}{x^3}$□$(x>0)$□

□$(1$□f□1□$)$□□□□□□□$y=-4x+1$□□□

□ f' □1□ $=-4$ □□ $\frac{-2-2a}{1}=-4$ □□□ $a=1$ □

□ $f'(x)=\frac{-2-2a+4lnx}{x^2}=\frac{-4+4lnx}{x^2}=0$ □

□□□ $x=e$ □

□ $f'(x)>0$ □□□□ $x>e$ □

□□ $f(x)$ □ $(e,+\infty)$ □□□□□□

□ $f'(x)<0$ □□□□ $0<x<e$ □

□□ $f(x)$ □ $(0,e)$ □□□□□□

$\therefore f(x)$ □ $x=e$ □□□□□□□□□□ $f(e)=-\frac{1}{e^2}$ □□6 □□

□2□□ $|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1^2-x_2^2}|>\frac{k}{x_1^2□x_2^2}$ □□□ $|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{\frac{1}{x_1^2}-\frac{1}{x_2^2}}|>k$ □

□ $g(\frac{1}{x^2})=f(x)$ □□ $g(x)=x+xlnx$ □□□□ $x\in[e^2$ □ $+\infty)$ $g'(x)=2+lnx$ □

□ $x\in[e^2$ □ $+\infty)$ □□ $g'(x)=2+lnx.4$ □

□ $|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{\frac{1}{x_1^2}-\frac{1}{x_2^2}}|>4$ □

$\therefore$ □□ k □□□□□□ $(-\infty$ □ $4]$ □□12 □□

8□□2020□•□□□□□□□□□ $f(x)=alnx+x^2(a\neq 0)$ □

□1□□ $b=2$ □□□□ $f(x)$ □□□□□□□□□ a □□□□□□

□2□□ $a+b=0$ □ $b>0$ □□□□□ x_1 □ $x_2\in[\frac{1}{e}$□ $e]$ □□ $|f(x_1)-f(x_2)|\leq e-2$ □□□□□□ b □□□□□

□□□□□□1□□□ $f(x)$ □□□□□ $(0,+\infty)$ □

□ $b=2$ □□ $f(x)=a\ln x+x^2(a\neq 0)$ □ $f'(x)=\frac{a}{x}+2x=\frac{2x^2+a}{x}$ □

① □ $a>0$ □□ $f'(x)>0$ □$\therefore$□□ $f(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□

$x\to 0$ □□ $f(x)\to -\infty$ □ $x\to +\infty$ □□ $f(x)\to +\infty$ □□□□□ $f(x)$ □□□□□□□

② □ $a<0$ □□□ $f'(x)=0$ □ $x=\sqrt{-\frac{a}{2}}$ □□ $x=-\sqrt{-\frac{a}{2}}$ □□□□□

$x\in(0,\sqrt{-\frac{a}{2}})$ □□ $f'(x)<0$ □ $x\in(\sqrt{-\frac{a}{2}}$□ $+\infty)$ □□ $f'(x)>0$

$\therefore$□□ $f(x)$ □ $(0,\sqrt{-\frac{a}{2}})$ □□□□□□ $(\sqrt{-\frac{a}{2}}$□ $+\infty)$ □□□□□

□□□□ $f(x)$ □□□□□□□□ $f(\sqrt{-\frac{a}{2}})=a\ln\sqrt{-\frac{a}{2}}-\frac{a}{2}=0$ □□□ $a=-2e$

$\therefore$□□ a □□□□□□□ $\{a|a=-2e$ □□ $a>0\}$

□2□ □□□ x_1 □ $x_2\in[\frac{1}{e}$□ $e]$ □□ $|f(x_1)-f(x_2)|\leq e-2$ □□□ $|f(x_1)-f(x_2)|\leq f(x)_{max}-f(x)_{min}$ □

$\therefore f(x)_{max}-f(x)_{min}$ □$)\leq e-2$ □□

□ $a+b=0$ □ $b>0$ □□ $f(x)=-b\ln x+x^b$ □ $f'(x)=\frac{b(x^b-1)}{x}$ □

□ $0<x<1$ □□ $f'(x)<0$ □□ $x>1$ □□ $f'(x)>0$ □

∴ $f(x)$ □ $[\frac{1}{e},1]$ □□□□□□ $[1$□$e]$ □□□□□

$f(x)_{min}=f$ □1□ $=1$ □ $f(\frac{1}{e})=b+e^{-b}$ □ f □e□ $=-b+e^{b}$ □

□ $g(b)=f(e)-f\left(\frac{1}{e}\right)=e^{b}-e^{-b}-2b\,(b>0)$ □ $g'(b)=e^{b}+e^{-b}-2>2\sqrt{e^{b}\cdot e^{-b}}-2=0$ □

∴ g □b□□ $(0,+\infty)$ □□□ ∴ g □b□ $>g(0)=0$ □∴ $f(e)>f(\frac{1}{e})$ □

□ □ $f(x)_{max}=f(e)=-b+e^{b}$ □

∴ $-b+e^{b}-1\leqslant e-2$ □□ $e^{b}-b-e+1\leqslant 0$ □

□ φ □b□ $=e^{b}-b-e+1$ □ $(b>0)$ □ φ' □b□ $=e^{b}-1>0$ □ $b\in(0,+\infty)$ □□□□

∴ φ □b□□ $(0,+\infty)$ □□□□□□ φ □1□ $=0$ □

∴□□□ $e^{b}-b-e+1\leqslant 0$ □□□□ $(0$ □ $1]$ □

∴□□ b □□□□□□ $(0$ □ $1]$

9□□2020•□□□□□□□□□ $f(x)=2x^{3}+3(1-a)x^{2}-6ax-3a$ □ $g(x)=3x^{2}+kx$ □

□I□□□□ $a\geqslant 1$ □□□ $f(-1)$ □□□ $f(x)$ □□□ $[-1$ □ $b](b>-1)$ □□□□□□□□□□□□□ b □

□II□□ $0<a<1$ □□□□□ $[-1$ □ $0]$ □□□□□□□□□□□□□ x_1 □ x_2 □□ $x_1<x_2$ □□□ $|g(x_1)-g(x_2)|<f(x_1)-f(x_2)$ □□□□ k □□□

□□□

□□□□□□□I□□□□□ $f(x)-f(-1)=(x+1)[2x^{2}+(1-3a)x-1-3a]\leqslant 0$ □□□ $[-1$ □ $b](b>-1)$ □□□□□

□□ $h(x)=2x^{2}+(1-3a)x-1-3a\leqslant 0$ □□□ $[-1$ □ $b](b>-1)$ □□□□□

□ $h(-1)=0$ □

∴□□ h □b□ $=2b^{2}+(1-3a)b-1-3a\leqslant 0$ □□□ $a\geqslant 1$ □□□□

□ m□a□ $= h$□b□ $= -3(b+1)a + 2b^{2} + b - 1$□

□□ m□1□ $= 2b^{2} - 2b - 4 \leqslant 0$□

□□ $-1 < b \leqslant 2$□

$\therefore$ □□□□□ b□ 2□

□II□□ $x \in [-1$□$0]$ □□□ $a > 0$□

$\therefore f'(x) = 6(x+1)(x-a) \leqslant 0$□

$\therefore$ □□ $f(x)$ □□□ $[-1$□$0]$ □□□□□□

□ $x_1 < x_2$□ $|g(x_1) - g(x_2)| < f(x_1) - f(x_2)$ □□□

$\therefore f(x_2) - f(x_1) < g(x_1) - g(x_2) < f(x_1) - f(x_2)$ □□□

□ $f(x_1) + g(x_1) > f(x_2) + g(x_2)$ □ $f(x_1) - g(x_1) > f(x_2) - g(x_2)$□

$\therefore p(x) = f(x) + g(x)$ □ $q(x) = f(x) - g(x)$ □□□ $[-1$□$0]$ □□□□□□

□ $p'(x) = 6(x+1)(x-a) + 6x + k \leqslant 0$ □□□ $6 - k \geqslant 6(x+1)(x-a+1)$ □□□ $[-1$□$0]$ □□□□□

$\therefore 6 - k \geqslant 6(1-a)$ □□ $k \leqslant 6a$□

□ $q'(x) = 6(x+1)(x-a) - 6x - k \leqslant 0$ □□□ $k - 6 \geqslant 6(x+1)(x-a+1)$ □□□ $[-1$□$0]$ □□□□□

$\therefore k - 6 \geqslant 0$ □□ $k \geqslant 6$□

□ $0 < a < 1$□

$\therefore k$ □□□□

10□□2020•□□□□□□□□□ $f(x) = |lnx - a| - 2lnx + x$□ $a \geqslant 2$□

□1□□ $a = 2$ □□ $f(x)$ □□□□□□

□2□□□□ $\forall x_1$□$x_2\in[3$□$9]$□$|f(x_1)-f(x_2)|\le 2+\ln 3$□

□□□□□□1□□ $a=2$□□ $f(x)=|\ln x-2|-2\ln x+x=\begin{cases}x-3\ln x+2,0<x\le e^2\\x-\ln x-2,x>e^2\end{cases}$ □

□$0<x\le e^2$□□ $f'(x)=1-\frac{3}{x}=\frac{x-3}{x}$ □□□□ $f(x)$ □$(0,3)$□□□□□$(3,e^2)$□□□□□

□ $f(x)_{min}=f$□3□$=5-3\ln 3>0$□□□□□□□□

□$x>e^2$□□ $f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$ □□□□ $f(x)$□$(e^2$□$+\infty)$□□□□□

□ $f(e^2)=e^2-4>0$□□□□□□□□

□□□□$a=2$□□□□ $f(x)$ □□□□□□0□

□2□□□□□□□ $\forall x_1$□$x_2\in[3$□$9]$□$|f(x_1)-f(x_2)|\le 2+\ln 3$□□□ $x\in[3$□$9]$□□ $f(x)_{max}-f(x)_{min}\le 2+\ln 3$□

① □$2\le a<\ln 9$□□ $f(x)=\begin{cases}x-3\ln x+a,x\in[3,e^a]\\x-\ln x-a,x\in(e^a,9]\end{cases}$ □

□$3\le x\le e^a$□□ $f'(x)=1-\frac{3}{x}=\frac{x-3}{x}\ge 0$ □□□□ $f(x)$ □□□□□

□$e^a<x\le 9$□□ $f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}>0$ □□□□ $f(x)$ □□□□□

□□□ $f(x)$□$[3$□$9]$□□□□□□

$\therefore f(x)_{max}=f$□9□$=9-\ln 9-a$□ $f(x)_{min}=f$□3□$=3-3\ln 3+a$□

$\therefore f(x)_{max}-f(x)_{min}=6+\ln 3-2a\le 2+\ln 3$□

② □$a\ge\ln 9$□□ $f(x)=x-3\ln x+a$□□□□□ $f(x)$□$[3$□$9]$□□□□□□

$\therefore f(x)_{max}=f$□9□$=9-3\ln 9+a$□ $f(x)_{min}=f$□3□$=3-3\ln 3+a$□

$\therefore f(x)_{max}-f(x)_{min}=6-3\ln 3<2+\ln 3$□

□□□ $\forall x_1$□$x_2 \in [3□9]$□□ $|f(x_1)-f(x_2)| \leqslant 2+\ln 3$□

11□□2020□•□□□□□□□□□□□□□ $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$□

□1□□□□□ $(t,t+\dfrac{2}{3})$□$t>0$□□□□□□ $f(x)$ □□□□□□□□□□□ t□□□□□

□2□□□□□ x_1□$x_2 \in [e^2$□$+\infty)$□□ $|f(x_1)-f(x_2)| \geqslant k|\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_2}|$ □□□□ k□□□□□

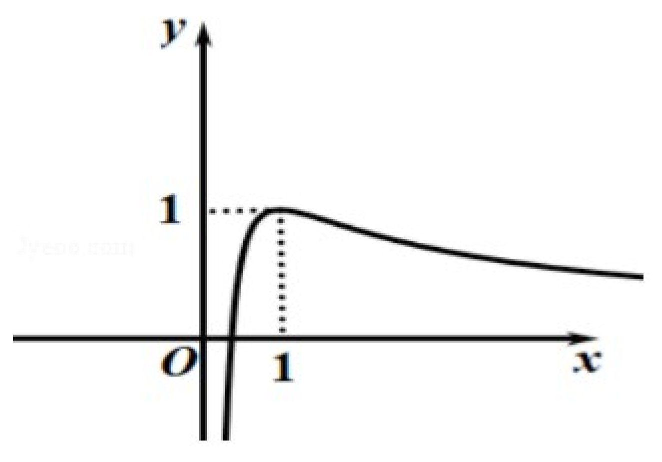
□□□□1□□□ $f(x)$ □□□□□ $(0,+\infty)$, $f'(x)=-\dfrac{\ln x}{x^2}$□

$f'(x)>0 \Rightarrow 0<x<1$□ $f'(x)<0 \Rightarrow x>1$□

□□ $f(x)$ □$(0,1)$□□□□□□$(1,+\infty)$ □□□□□□□□□ f□1□$=1$□

□$x \to 0$ □□ $y \to -\infty$□ □ $x>1$ □□ $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}>0$ □

□ $f(\dfrac{1}{e})=0$ □□ $f(x)$ □□□$(0,1)$□□□□□□□□□ $f(x)$ □□□□□□□□□



$\therefore$□□□ $(t,t+\dfrac{2}{3}), t>0$ □□□□□□ $f(x)$ □□□□□□□

$\therefore \begin{cases} 1<t+\dfrac{2}{3} \\ f(t)=\dfrac{1+\ln t}{t}<0 \end{cases}$ □□□ $\dfrac{1}{3}<t<\dfrac{1}{e}$□

□ $t \in (\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{e})$ □

□2□□□1□□□□□□ $f(x)$ □$[e^2$□$+\infty)$ □□□□□□

□□□ $x_1 > x_2 \geq e^2$ □□ $|f(x_1)-f(x_2)|\geq k|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}|$ □□ $f(x_2)-f(x_1)\geq k(\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1})$ □

$\therefore f(x_2)-\frac{k}{x_2}\geq f(x_1)-\frac{k}{x_1}$ □

□ $F(x)=f(x)-\frac{k}{x}=\frac{1+lnx}{x}-\frac{k}{x}$ □

□□ $F(x)=f(x)-\frac{k}{x}$ □$[e^2$□$+\infty)$ □□□□□□

□ $F'(x)=\frac{k-lnx}{x^2}\leq 0$ □$[e^2$□$+\infty)$ □□□□□

□$k\leq lnx$ □$[e^2$□$+\infty)$ □□□□□

□□□□ $x\in[e^2$□$+\infty)$ □□ lnx□□□□□ $lne^2=2$□

$\therefore k\leq 2$□

□□□k□□□□□□$(-\infty$□$2]$□